Model harmonijskog oscilatora

Sonja Kovačević[1], Miroslav Jovanović[2]

[1]Prva kragujevačka gimnazija, Kragujevac, Srbija
[2]Gimnazija „Josif Pančić“ Bajina Bašta, Srbija

Apstrakt. U klasičnoj mehanici, harmonijski oscilator je veoma popularan fizički model. Ovaj model se pojavljuje često u fizici i zato je sam po sebi vredan obrade u ovom radu. Sistem koji se ponaša po tom modelu ima ključnu osobinu: kada se izvede iz ravnotežnog položaja, nastaje povratna sila koja je proporcionalna otklonu od ravnotežnog položaja. Ako je ova sila jedina koja deluje na sistem, sistem se zove prosti harmonijski oscilator, i podleže prostom harmonijskom kretanju. U radu je data univerzalna jednačina oscilatora i njeno opšte rešenje. Na kraju, opisan je demonstracioni eksperiment sa oscilovanjem mase na vertikalnoj opruzi, pod okolnostima da se masa smanjuje u toku vremena.

POTENCIJALNA FUNKCIJA

Funkcija koja predstavlja zavisnost potencijalne energije od rastojanja naziva se potencijalna funkcija koju obeležavamo sa $U(x)$. Funkcija potencijalne energije proizvoljnog fizičkog sistema može se razviti u Tejlorov red po x, oko položaja minimuma energije. Ako napišemo prva tri člana pomenutog reda, imamo:

$$U(x) = U(x_0) + (x - x_0)U'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 U''(x_0) + ... \tag{1}$$

Pošto potencijalna energija ima minimum u tački x_0, prvi izvod u tački x_0 mora biti nula. Pored toga prvi član sa desne strane relacije je konstanta, i njega ne moramo uzet u obzir, jer je on samo jedna od mogućih aditivnih konstanti. Tako se dobija:

$$U(x) \approx \frac{1}{2}(x - x_0)^2 U''(x_0) \tag{2}$$

Koordinatni pošetak možemo tako izabrati da je $x_0 = 0$. Drugi izvod funkcije potencijalne energije u minimumu je neka konstanta koju možemo obeležiti, na primer, sa k. Tako se konačno dobija približan izraz za potencijalnu energiju u obliku

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \ . \tag{3}$$

Ovaj vid potencijalne energije u skladu je sa modelom prostog harmonijskog oscilatora. Parametar k zovemo, u slučaju oscilovanja mase na opruzi, koeficijent elastičnosti opruge. Tako zaključujemo da uopštena proizvoljna funkcija potencijalne energije nekog fizičkog sistema, u prvoj aproksimaciji nužno vodi do rešenja koje zovemo prosto harmonijsko oscilovanje.

PROSTI HARMONIJSKI OSCILATOR

Fizički sistem koji ima tu osobinu da kada se izvede iz ravnotežnog položaja, nastaje povratna sila koja je proporcionalna otklonu iz ravnotežnog položaja, zovemo harmonijski oscilator. U jednodimenzionom slučaju je ta sila

$$\vec{F} = -kx\vec{e}_x \; . \tag{4}$$

gde je $\vec{e}_x$ ort. Ovde je k pozitivna konstanta, parametar koji karakteriše osobine sistema. Prosti harmonijski oscilator podleže prostom harmonijskom kretanju: harmonijsko oscilovanje (sinusne oscilacije) oko tačke ravnoteže, sa konstantnom amplitudom i konstantnom frekvencijom (koja nije zavisna od amplitude). Prosti harmonijski oscilator nema prinudnu silu, i nema trenje u idealizovanom slučaju, tako da je ukupna sila baš jednaka onoj u formuli (4). Drugi Njutnov zakon neposredno daje

$$F = ma = -kx \tag{5}$$

Diferencijalna jednačina kretanja prostog harmonijskog oscilatora postaje $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$, koju često pišemo u prepoznatljivom obliku:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{6}$$

gde je $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ugaona frekvencija. Opšte rešenje ove jednačine je oblika

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) \tag{7}$$

Ovde je A amplituda i uvek je pozitivna konstantna veličina čija vrednost zavisi samo od početnih uslova oscilovanja. Veličina $\omega_0 t + \varphi$ naziva se faza oscilovanja i određuje vrednost pomeranja x u datom trenutku vremena. Konstanta φ naziva se početna faza i karekteriše oscilovanje u početnom momentu vremena $t = 0$. Takođe, opšte rešenje može biti napisano i u obliku $x = A\sin\left(\omega_0 t + \phi\right)$. Ugaona frekvencija je povezana sa običnom frekvencijom na dobro poznati način: $f = \omega_0 / 2\pi$. Kinetička energija oscilovanja može se izračunati po formuli

$$E_k = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2\left(\omega_0 t + \varphi\right). \tag{8}$$

Postoji i potencijalna energija, i ona se računa po formuli

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi\right). \tag{9}$$

Ukupna energija sistema je zbir kinetičke i potencijalne energije i ona ima konstantnu vrednost koja iznosi: $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$.

Veliki broj harmonijskih oscilatora dobro je tretiran diferencijalnom jednačinom

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A_0\cos\omega t \tag{10}$$

gde su: t - vreme, b - konstanta prigušenja, ω_0 - karakteristična ugaona frekvencija, i $A_0\cos\omega t$ je prinudna sila koja daje pogon sistemu. Amplituda prinudne sile je A_0 i ugaona frekvencija je ω. Veličina x je veličina koja se meri ili opaža, to može biti elongacija, trenutna brzina, ili neka druga merljiva karakteristika sistema.

JEDNA UNIVERZALNA JEDNAČINA I NJENO OPŠTE REŠENJE

Jedna univerzalna jednačina oscilatora je oblika

$$\frac{d^2q}{d\tau^2}+2\xi\frac{dq}{d\tau}+q=0\,. \tag{11}$$

Rešenje ove jednačine ima različit oblik u zavisnosti od vrenosti za ξ, i to:

1. Ako je $\xi<1$ rešenje je oscilatorno: $q_{osc}=e^{-\xi\tau}\left[C_1\cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\tau\right)+C_2\sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\tau\right)\right]$ i ovo rešenje odgovara slučaju malog prigušenja.
2. Ako je $\xi=1$ rešenje za slučaj kritičnog prigušenja je: $q_{krit}=e^{-\tau}\left[C_1+C_2\tau\right]$.
3. Ako je $\xi>1$ rešenje za natkritično prigušenje je oblika: $q=e^{-\xi\tau}\left[C_1e^{\sqrt{\xi^2-1}\,\tau}+C_2e^{-\sqrt{\xi^2-1}\,\tau}\right]$.

Integracione konstante C_1 i C_2 određuju se iz početnih uslova. Ukoliko u jednačini (11) postoji i prinudna sila u sistemu, oblika $\cos(\omega\tau)$, rešenje ove diferencijalne jednačine se sastoji iz dva dela: a) prelaznog rešenja i b) stacionarnog rešenja. Prelazno rešenje se dobija rešavanjem odgovarajuće homogene jednačine (11), i za to su već ispisana rešenja 1-3. Taj deo rešenja obeležavamo sa $q_{prel}(\tau)$. Jedan od načina da se dobije stacioanrno rešenje jeste da se najpre reši pomoćna jednačina $d^2q/d\tau^2+2\xi dq/d\tau+q=\cos\omega\tau+i\sin\omega\tau$. Ono se dobija standardnim postupkom, gde se pretpostavi rešenje u obliku $q_{stac}=Ae^{i(\omega\tau+\varphi)}$. Tako dobijamo izraze za amplitudu i početnu fazu, respektivno:

$$A(\xi,\omega)=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)^2+\left(2\xi\omega\right)^2}}\,, \tag{12}$$

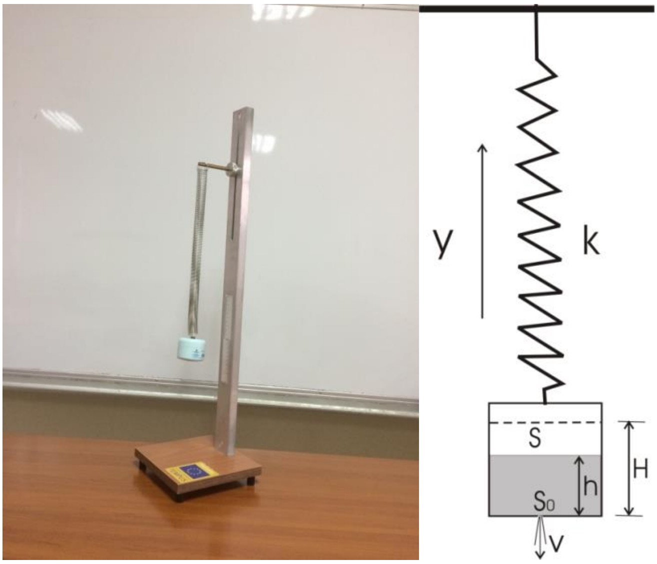
$$\varphi(\xi,\omega)=\mathrm{arctg}\left(\frac{2\xi\omega}{\omega^2-1}\right). \tag{13}$$

Konačno, stacionarno rešenje se dobija u obliku $q_{stac}(\tau)=A(\xi,\tau)\cos\left[\omega\tau+\varphi(\xi,\omega)\right]$. Prema tome, rešenje jednačine univerzalnog oscilatora je superpozicija prelaznog rešenja i stacionarnog rešenja: $q(\tau)=q_{prel}(\tau)+q_{stac}(\tau)$.

DEMONSTRACIONI OGLED – ANALIZA I PRORAČUN

Na slici 1a prikazana je fotografija demonstracionog eksperimenta sa telom promenljive mase koje osciluje na opruzi konstante k. Telo je valjkasti kanister u koji se sipa određena količina tečnosti početne mase m_0. U centru osnove nalazi se mali kružni otvor za isticanje tečnosti. Ako se sistem izvede iz ravnotežnog položaja i pusti, sistem vertikalno osciluje. Ono što se opaža je da se brzina isticanja tečnosti čas pojačava, čas smanjuje. U našem ogledu je korišćena opruga dužine 20,5 cm konstante elastičnosti 5,2. Koristili smo valjkasti kanister prečnika 5,9 cm i visine 4,7 cm.

Da bismo napravili analizu ogleda, potrebno je setitise misaonog eksperimenta sa telom mase m koje miruje na vagi, a vaga se nalazi na patosu lifta. Lift se kreće ubrzano sa ubrzanjem $\vec{a}$. U slučaju da se lift kreće vretikalno naviše, tada je težina tela $Q=m(g+a)$. Odavde vidimo da je u ovom slučaju, usled kretanja lifta, težina tela veća od težine tela u mirovanju. Obrnuto, u slučaju spuštanja lifta imamo $Q=m(g-a)$. Ovaj efekat se može lako proveriti i u svakodnevnom iskustvu penjanja i spuštanja liftom u zgradi. Ukoliko je telo kanister (slika 1a) u kome se nalazi tečnost do visine h, i ako kanister miruje, pritisak tečnosti na dno suda će biti $p=\rho gh$. Na osnovu Bernulijeve jednačine nalazimo i obrazac za brzinu isticanja tečnosti na malom otvoru S_0 na dna suda: $v=\sqrt{2gh}$. U slučaju da se lift kreće ubrzano naviše, sa ubrzanjem a, izraz za pritisak treba korigovati, pa će biti $p=\rho(g+a)h$. Tada formula za brzinu isticanja tečnosti postaje: $v=\sqrt{2(g+a)h}$. Primenimo sada ovu logiku na sud sa vodom koji predstavlja promenljivu masu koja osciluje na opruzi konstante elastičnosti k (Slika 1b).



(a) (b)

SLIKA 1. (a) Oscilatorni sistem: telo promenljive mase na elastičnoj opruzi. Površina poprešnog preseka suda iznosi S, a površina malog otvora u centru osnove suda je S_0. Konstanta elastičnosti opruge je k. (b) Uz razmatranje oscilatora promenljive mase; H je početni nivo tečnosti u kanisteru, a h nivo tečnosti u posmatranom trenutku t.

Uzimajući da je ubrzanje za dato harmonijsko oscilovanje $a=(-k/m)y$ pri čemu je za zadatu amplitudu A elongacija jednaka $y=A\sin\left(\sqrt{k/m}\,t\right)$, nalazimo da je brzina isticanja tečnosti iz kanistera

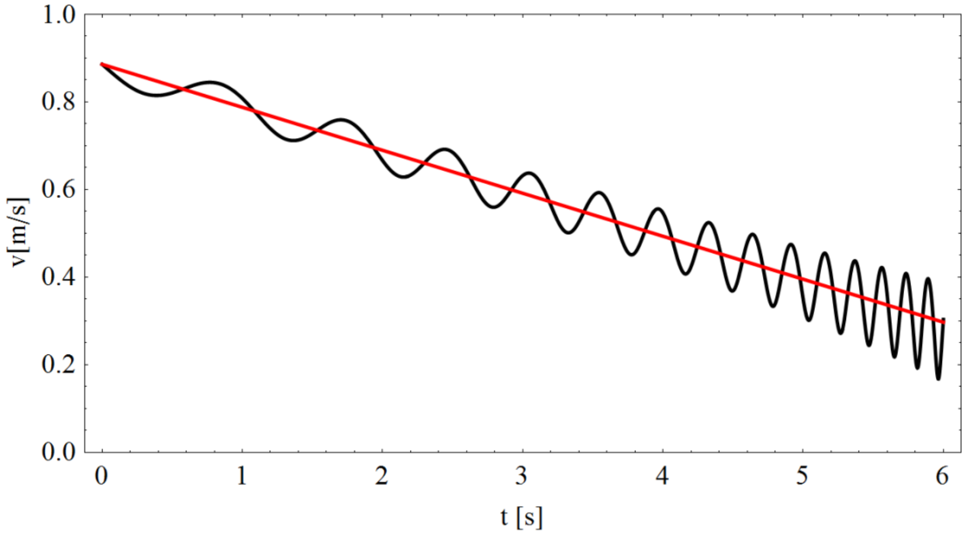
$$v=\sqrt{2gH}\sqrt{\frac{h}{H}\left(1-\frac{\omega^2 A}{g}\sin\omega t\right)} \tag{14}$$

gde je $\omega=\sqrt{k/m}$. Vremenom, nivo tečnosti u kanisteru opada. Na osnovu jednačine kontinuiteta, za opadanje nivoa tečnosti u kanisteru imamo $-Sdh=S_0\sqrt{2gh}dt$. Integracijom dobijamo

$$h(t)=H\left(1-\frac{S_0\sqrt{2gH}}{2SH}t\right)^2. \tag{15}$$

Kada znamo kako se menja nivo tečnosti u oscilujućem kanisteru, možemo da izračunamo i trenutni protok tečnosti kroz otvor na dnu suda. Protok računamo po formuli $Q=S_0v$. Interesantno je nacrtati grafik funkcije $v/v_0=f(\tau)$, gde je $v_0=\sqrt{2gH}$, a normalizovano vreme

$\tau = t / t_H$. Ovde je $t_H = 2SH / (S_0 v_0)$ idealizovano vreme za koje istekne sva voda iz suda. Numeričkom obradom formule (14) dobijen je grafik koji pokazuje kako se brzina isticanja tečnosti menja sa vremenom (slika 2). U proračunu su uzete vrednosti: k=5,2, m_0=0,2 kg, A=0,03 m, g=9,81 m/s^2, H=0,04 m i S/S_0=100. Vvisina tečnosti u sudu h i masa m su funkcije od vremena t .



SLIKA 2. Brzina isticanja tečnosti iz oscilujućeg kanistera.

Prava linija na slici 2 pokazuje brzinu isticanja tečnosti iz kanistera kada kanister miruje. Oscilatorna kriva pokazuje brzinu isticanja kada kanister osciluje. Vidimo da se oscilatorni karakter brzine isticanja tečnosti zadržava. Takođe vidimo da sa smanjenjem nivoa tečnosti u sudu se snižava i srednja brzina isticanja tečnosti, i smanjuje se period oscilovanja suda na opruzi.

ZAKLJUČAK

U radu su date osnovne napomene o harmonijskim oscilacijama i formule za objašnjenje ponašanja prostog harmonijskog oscilatora. Opisan je jedan demonstracioni eksperiment koji može da posluži kao baza za izradu maturskog rada iz fizike u gimnazijama. Eksperiment se može realizovati bez mnogo ulaganja u laboratorijski pribor i potrošni materijal, i kao takav dostupan je svim školama. Poseban akcenat je na numeričkoj obradi formula i grafičkom predstavljanju odgovarajućih funkcija.

LITERATURA

1. C. Kitel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, Mehanika, Tehnička knjiga, Zagreb 1981. (Naslov originala: Mechanics, Berkeley Physics Course – Volume 1, Second Edition).
2. V. Saveljev, Kurs opšte fizike, mehanika i molekularna fizika, „Nauka“, Moskva 1982.
3. B. A. Aničin, D. M. Davidović, V. M. Babović, On the linear theory of the elastic pendulum, Eur. J. Phys. 14, 1993, 132-135.
4. D. M. Davidović, B. A. Aničin, V. M. Babović, The libration limits of the elastic pendulum, Am. J. Phys. 64, 1996, 338-342.