Нелинеарно еластично клатно

Милан С. Ковачевић[1], Мирослав Јовановић[2]

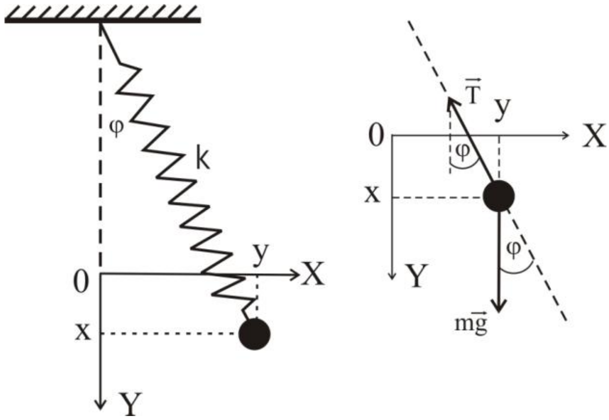
[1]Природно-математички факултет, Крагујевац, Србија
[2]Гимназија „Јосиф Панчић“ Бајина Башта, Србија

Апстракт. У овом раду је описан експеримент са еластичним клатном, који може омогућити талентованим и надпросечним ученицима да усвојено градиво које су са својим вршњацима учили у школи, дубље проуче и примене. Описани експеримент се може реализовати без много улагања у лабораторијски прибор и потрошни материјал, и као такав је доступан свим школама. Посебан акценат је на мерењу са еластичним клатном које се употпуњује са одговарајућом нумеричком симулацијом кроз коју ученик може самостално да одреди резонантну масу клатна.

Кључне речи: еластично клатно, нелинеарне осцилације.

УВОД

На слици 1 је приказано еластично клатно које се састоји из тела масе m учвршћеног о еластичну опругу константе k . Ако је маса тела m доста већа од масе еластичне опруге маса опруге се може занемарити што поједностављује анализу кретања клатна. Такође, линеарне димензије тела су доста мање од дужине опруге.



СЛИКА 1. Еластично клатно у положају када опруга заклапа угао φ са правцем Y -осе (слика лево); силе које делују на тело масе m када се оно налази у положају (x, y) (слика десно).

Иако је еластично клатно релативно једноставан систем, под одређеним условима, кретање клатна је сложено кретање, и јако зависи од вредности параметара система клатно-опруга (масе тела, константе опруге, и др.) као и почетних услова. Ако деловањем спољашњих сила систем изведемо из равнотежног положаја, побуђивањем искључиво вертикалних осцилација, затим га пустимо, онда он врши хармонијско осциловање. Међутим, ако је фреквенција вертикалних хармонијских осцилација тачно два пута већа од фреквенције осциловања математичког клатна, вертикалне осцилације постају нестабилне, и побуђују се хоризонталне осцилације. Укупно кретање клатна се може посматрати као суперпозиција два кретања: вертикалних осцилација тела масе m обешеног о еластичну опругу константе k, и осциловања “математичког“ клатна промењљиве дужине. У овом раду је најпре исписан и анализиран нелинеаран систем куплованих једначина кретања описаног клатна. Затим је приказан експеримент са клатном промењљиве масе са циљем да се одреди резонантни услов када вертикалне осцилације прелазе у хоризонталне и обрнуто.

ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА

Да бисмо добили једначине којима се описује кретање нелинеарног клатна, уочимо све силе које делују на тело масе m када се оно нађе у тачки (x, y). Означимо са $\omega_v = \sqrt{k/m}$ кружну фреквенцију вертикалних хармонијских осцилација. Ако је l_0 дужина неоптерећене еластичне опруге, после вешања тела масе m дужина клатна биће $l = l_0 + l_1$, где је $l_1 = mg/k$. У положају који одговара тачки (x, y), дужина клатна износи λ (ова дужина се мења току осциловања клатна). Тренутни положај клатна је одређен поларним координатама λ и φ. Сагласно другом Њутновом закону, једначина кретања клатна има облик

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g} \,. \tag{1}$$

Пројектовањем векторске једначине на правац x-осе, добија се скаларна једначина

$$m\ddot{x} = -T\sin\varphi \tag{2}$$

где је $\sin\varphi = x/\lambda$, а интензитет еластичне силе је $T = k(\lambda - l_0)$. Овде је уведена ознака за други извод по времену, тј. $\ddot{x} \equiv d^2x/dt^2$. Једначина (2) се може преписати у облику

$$m\ddot{x} = -k\left(\lambda - l + l - l_0\right)\frac{x}{\lambda} \,. \tag{3}$$

Ако се једначина (3) подели са l, и у наставку величине x и λ посматрамо као нормализоване, једначина кретања дуж правца x-осе је

$$\ddot{x} + \omega_h^2 x = -\beta x\frac{\lambda - 1}{\lambda} \,, \tag{4}$$

где је $\omega_h = \sqrt{g/l}$ кружна фреквенција хоризонталних осцилација, и $\beta = \omega_v^2 - \omega_h^2$. Слично, пројекција једначине (1) на правац y-осе даје

$$m\ddot{y} = -k(\lambda - l_0)\cos\varphi + mg \tag{5}$$

Користећи се сличним поступком као и у поступку извођења једначине (4), једначина (5) постаје

$$m\ddot{y} = -k(\lambda - 1)\cos\varphi + mg(1 - \cos\varphi) \tag{6}$$

где је $\cos\varphi = (l + y)/\lambda$. Укључивањем величина ω_h, ω_v и β, груписањем сродних чланова добија се једначина у облику

$$\ddot{y} + \omega_v^2 y = -\beta + \beta\frac{1 + y}{\lambda} \,. \tag{7}$$

Једначине (4) и (7) представљају систем чијим решавањем се добијају коначне једначине кретања клатна, тј. $x(t)$ и $y(t)$. Ако се у једначини (4) изабере $\lambda = 1$, десна страна једначине постаје нула. Слично, ако се у једначини (7) изабере $\lambda = 1$ за $y = 0$, десна страна једначине такође постаје нула. Ово је потврда о коректности ових једначина. Ради боље прегледности групишимо нелинеарне купловане једначине кретања:

$$\ddot{x} + \omega_h^2 x = -\beta x \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \tag{I}$$

$$\ddot{y} + \omega_v^2 y = -\beta + \beta \frac{1 + y}{\lambda}. \tag{II}$$

Линеарна теорија

Ако се у једначинама (I) и (II) узме апрокисмација $x << 1$ и $y << 1$ (детаљи извођења су дати у Реф.[3]), добија се систем једначина

$$\ddot{x} + \omega_h^2 x = -\beta xy \tag{Iл}$$

$$\ddot{y} + \omega_v^2 y = -\frac{1}{2}\beta x^2 \tag{IIл}$$

Овај систем је основа за линеарну анализу еластичног клатна, видети Реф. [1].
Нека су на почетку побуђене само вертикалне осцилације, тј. $y = A\cos(\omega_v t)$ чија је амплитуда A. Тада једначина (Iл) постаје

$$\ddot{x} + \left[\omega_h^2 + \beta A \cos(\omega_v t)\right] x = 0 \tag{10}$$

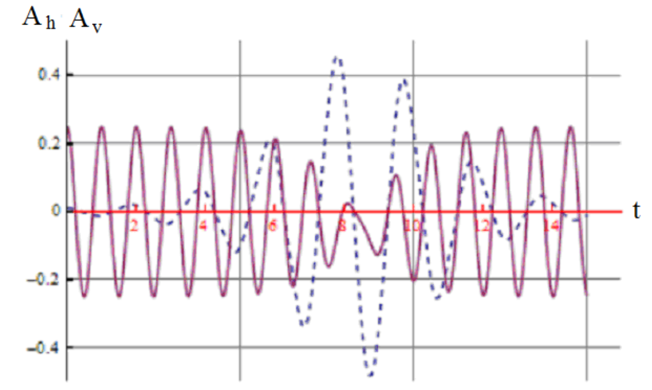
која има облик Mathieu-ове једначине [4]

$$\ddot{x} + \left[a + 16q\cos(2\tau)\right] x = 0, \tag{11}$$

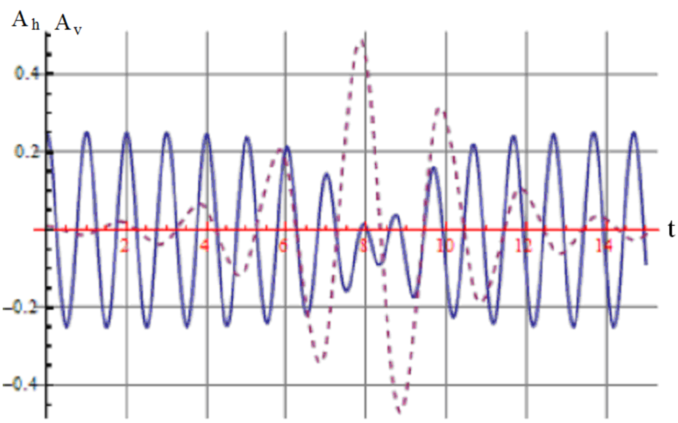
где је $\tau = (1/2)\omega_v t$, $a = 4l_1 / l = 4mg/(kl)$ и $q = A(1 - a/4)/4$. Услов $a = 1$ одговара параметарској резонацији $\omega_v = 2\omega_h$. Овај услов можемо написати у облику $4m_R g = kl$ или $m_R = kl_0/(3g)$. Маса m_R се назива *резонантна* маса. При овој вредности масе, систем опруга-тело постаје нестабилан, вертикалне осцилације прелазе у хоризонталне и обрнуто.

Нумеричко решење

Нумеричко решење система (I-II) се може добити, на пример, применом пакета *Wolfram Mathematica 8*. Као решење се добија временска еволуција хоризонталних и вертикалних осцилација еластичног клатна, тј. амплитуде ових осцилација A_v и A_h у функцији од времена (Слика 2). У току осциловања, енергија вертикалних осцилација се трансформише у енергију хоризонталних осцилација. После одређеног времена, аплитуда вертикалних осцилација постаје минимална док амплитуда хоризонталних осцилација је максимална. Прорачун је урађен за опругу чија је константа 50 N/m и равнотежну дужину опруге 100 cm. На слици 3 је приказано нумеричко решење система (Iл-IIл) за исте вредности коснтанте и дужине опруге. У оба случаја резонатнта маса износи 1,274 kg.



СЛИКА 2: Хоризонталне (испрекидана линија) и вертикалне осцилације (пуна линија), пуна теорија, једначине (4) и (7) [3]; $k = 50\,\mathrm{N/m}$, $l = 1\,\mathrm{m}$, $m = 1{,}27\,\mathrm{kg}$.



СЛИКА 3: Хоризонталне (испрекидана линија) и вертикалне осцилације (пуна линија), линеаризовани систем једначина (10) и (11)) [3]; $k = 50\,\mathrm{N/m}$, $l = 1\,\mathrm{m}$, $m = 1{,}27\,\mathrm{kg}$.

Демонстрациони оглед

Иако је теорија нелинеарног клатна доста сложена, оглед са којим се може демонстрирати кретање овог клатна је релативно једноставан и не захтева скупу апаратуру (Слика 4). Еластична опруга се окачи о хоризонталну пречку и пусти да виси. Константа опруге је k. За доњи крај опруге се обеси тег масе m који истеже опругу до равнотежног положаја. Маса тега треба да буде приближна резонантној маси $m_R = \dfrac{kl_0}{3g}$.

У експерименту се најпре побуде вертикалне осцилације амплитуде A_v. На почетку хоризонталне осцилације су веома слабе, скоро да их нема. Временом вертикалне осцилације се пригушују, њихова амплитуда постаје све мања, и после одређеног времена ова амплитуда постаје минимална, док амплитуда хоризонталних осцилација нараста до максималне вредности.

СЛИКА 4: Демонстрациони оглед за нелинеарне хармонијске осцилације. Маса тега је изабрана тако да је приближно једнака резонантној маси $m_R = kl_0 / (3g)$.

ЕЛАСТИЧНО КЛАТНО ПРОМЕНЉИВЕ МАСЕ

У експерименту је најпре одређена константа еластичне опруге. О опругу дужине 11 cm додавани су тегови почевши од 20 g до 80 g. Применом Хуковог закона $\Delta m g = k\Delta l$, добијена је средња вредност за константу опруге k=9,2 N/m. Пошто је одређена карактеристика опруге, на опругу је окачен пластични "контејнер" пречника 6 cm и висине 5,5 cm који се могао напунити са приближно 100 g воде. На слици 5 је дата фотографија експеримета са еластичним клатном промељиве масе.

СЛИКА 5: Еластично клатно променљиве масе.

Након качења празног "контејнера" ефективна дужина клатна је износила l_0=15cm. Маса опруге је $m_o = 12.75g$. Маса празног контенјнера је $m_t = 19.5g$. Маса тела окаченог на еластичну опругу биће $m = m_t + m_v$, где је m_v маса воде. Маса опруге је занемарљива у односу на масу m . Са доње стране контејнера, у центру, пробушена је рупа пречника 1 mm. У равнотежном стању, време потребно да сва вода из контејнера истекне је око 25 s. Извођењем осцилатора из равнотежног положаја у вертикалном правцу, побуђене су искључиво вертикалне осцилације $y = A\cos(\omega_v t)$. Како осциловање напредује, маса клатна се смањује, а кретање постаје све брже. У неком тренутку, појављују се хоризонталне осцилације. Клатно пролази кроз тачку која одговара параметарској резонанцији. Измерили смо критичну масу и нашли да она износи $m_R^m = 48.25\text{g}$. Применом формуле $m_R = \frac{kl_0}{3g}$ налазимо да ова маса износи 46.89 g. Процентуална грешка мерења је $\delta = 2.8\%$.

Закључак

У раду је акценат на демонстрационом огледу као и експерименту са еластичним клатном промењљиве масе који ће повећати активност свих ученика на часу физике. Истовремено они треба да допринесу повећању мотивације и бољем индивидуалном напредовању појединаца у складу са њиховим интелектуалним способностима. Идеја са шупљим контејнером је интересантна реализација клатна са промењљивом масом, а ученицима остављамо да они сами трагају за неким новим идејама како направити еластично клатно промењљиве масе. Анализом експеримента закључујемо да кретање клатна карактерише јака зависност од параметара којима се систем описује (нпр., константе опруге, масе тега, дужине опруге) и од почетних услова. Мала промена ових параметара може довести до драстичних промена у понашању нелинеарног система.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Аничин, Д. М. Давидовић, В. М. Бабовић, On the linear theory of the elastic pendulum, *Eur. J. Phys.* 14, 1993, pp. 132-135.
2. Д. М. Давидовић, Б. А. Аничин, В. М. Бабовић, The libration limits of the elastic pendulum, *Am. J. Phys.* 64, 1996, пп. 338-342.
3. М. Ковачевић, Н. Даниловић, В. М. Бабовић, Could variable mass oscillator exhibit the lateral instability?, *Kragujevac J. Sci*. 30, 2008, pp.31-44.
4. N. W. McLachlan, Theory and application of Matheiu Functions, Oxford: Clarendon, 1947.